

# Méthodes spectrales

Benoit Fabrèges

Institut Camille Jordan

28 mars 2019

## Quelques références

- R. Peyret, **Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow**.  
Pour commencer. La première partie concerne les méthodes spectrales de façon générale.
- L. N. Trefethen, **Spectral Methods in Matlab**.  
Pour commencer. Illustré par des codes Matlab téléchargeables :  
<http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/spectral.html>
- J. P. Boyd, **Chebyshev and Fourier Spectral Methods**.  
Très complet, à regarder pour aller plus loin. Version en ligne gratuite.
- D. Gottlieb, S. A. Orzag, **Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications**
- C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, **Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains**

# Sommaire

Généralités sur les méthodes spectrales

Base de Fourier

Les polynomes de Chebyshev

Quelques bibliothèques et logiciels

# Sommaire

Généralités sur les méthodes spectrales

Base de Fourier

Les polynomes de Chebyshev

Quelques bibliothèques et logiciels

## Produit scalaire

On considère deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur un domaine  $\Omega$ . On définit le produit scalaire entre ces deux fonctions par :

$$(u, v)_w = \int_{\Omega} u \bar{v} w,$$

où  $w$  est une fonction poids donnée.

Par exemple, pour deux fonctions dans  $L^2(\Omega)$  et  $w = 1$ , on retrouve le produit scalaire classique :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v},$$

que l'on utilisera plus tard.

## Approximation d'une équation différentielle

On considère une équation différentielle de la forme,

$$Lu - f = 0.$$

On peut penser, par exemple, à l'équation de Helmholtz  $-\Delta u + u = f$ .

- On cherche une approximation de la solution  $u$  sous la forme

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x).$$

- Les  $\varphi_k$  s'appellent les *fonctions de bases*. Elles vérifient une relation d'orthogonalité :

$$(\varphi_i, \varphi_j)_w = c_i \delta_{i,j} = \begin{cases} c_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On se donnera de telles fonctions de bases.

- Les  $\hat{u}_k$  sont alors les inconnues qu'il faut déterminer.

# Résidu

Si  $u_N$  est une approximation de l'équation  $Lu = f$ , on définit le résidu par :

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x).$$

- Par exemple, pour l'équation de Helmholtz, on aura :

$$R_N(x) = -\Delta u_N(x) + u_N(x) - f(x).$$

- Le résidu est nul pour la solution de l'équation. Une bonne approximation a donc un résidu "petit" (en un sens à préciser).

## Calcul d'une approximation $u_N$

On se donne des *fonctions tests*  $\psi_k$ , pour  $k$  dans un ensemble  $I_N$ , et un poids  $w_*$ .

On recherche les coefficients  $\hat{u}_k$  d'une approximation  $u_N$  en annulant le résidu associé dans le sens suivant :

$$(R_N, \psi_k)_{w_*} = \int_{\Omega} R_N \overline{\psi_k} w_* = 0, \quad k \in I_N.$$

Il y a donc  $|I_N|$  equations et  $N + 1$  inconnues.

Les choix des  $\psi_k$ ,  $w_*$  et  $I_N$  définissent le type de méthode spectrale.



## Problème type

On considère l'approximation de la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} Lu - f = 0, & \alpha < x < \beta, \\ B_- u = g_-, & x = \alpha, \\ B_+ u = g_+, & x = \beta. \end{cases}$$

On suppose  $L$  linéaire.  $B_-$  et  $B_+$  sont des conditions de bords (Dirichlet, Neumann, Robin).

On se donne des fonctions de bases  $\varphi_k$  pour  $k \in \{0, \dots, N\}$  et on note  $u_N$  l'approximation de  $u$ ,

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x)$$

Les fonctions de bases vérifient  $(\varphi_i, \varphi_j)_w = c_i \delta_{i,j}$ .

## La méthode de Galerkin

- On prend  $\psi_k = \varphi_k$  pour  $k \in I_N = \{0, \dots, N\}$ , et  $w_* = w$ .
- Les fonctions de bases vérifient les conditions de bords homogènes :

$$B_- \varphi_k = 0 \text{ en } x = \alpha, \quad B_+ \varphi_k = 0 \text{ en } x = \beta$$

On écrit alors la solution  $u$  sous la forme  $u = \tilde{u} + v$ , où :

- $\tilde{u}$  est n'importe quelle fonction satisfaisant les conditions de bords.
- la fonction  $v$  est donc solution du problème suivant :

$$\begin{cases} Lv - (f - L\tilde{u}) = 0, & \alpha < x < \beta, \\ B_- v = 0 & x = \alpha, \\ B_+ v = 0 & x = \beta. \end{cases}$$

## La méthode de Galerkin

- L'approximation  $v_N = \sum_{k=0}^N \hat{v}_k \varphi_k$  de  $v$  satisfait automatiquement les conditions de bords homogènes.
- Le résidu est  $R_N(x) = Lv_N - h$ , avec  $h = f - L\tilde{u}$ .
- On veut résoudre les  $N + 1$  équations :

$$(R_N, \varphi_i)_w = (Lv_N - h, \varphi_i)_w = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

ou encore,

$$\sum_{k=0}^N \hat{v}_k (L\varphi_k, \varphi_i) = (h, \varphi_i)_w, \quad i = 0, \dots, N.$$

## Remarques sur la méthode de Galerkin

- On utilise l'orthogonalité des fonctions de bases pour simplifier les équations. Par exemple, on a

$$(h, \varphi_i)_w = c_i \hat{h}_i$$

- Si les fonctions de bases ne vérifient pas les conditions de bords homogènes, on peut construire une nouvelle base à partir de la première qui a cette propriété.  
On perd, en général, la propriété d'orthogonalité dans ce cas.

## La méthode *tau*

- On prend  $\psi_k = \varphi_k$  pour  $k \in I_N = \{0, \dots, N-2\}$ , et  $w_* = w$ .
- On ne suppose **pas** que les fonctions de bases vérifient les conditions de bords homogènes.

Comme précédemment, on a les équations (sur les  $\hat{u}_k$  cette fois) :

$$\sum_{k=0}^N \hat{u}_k(L\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i)_w, \quad i = 0, \dots, N-2.$$

On complète ces  $N-1$  équations avec les deux conditions de bord :

$$B_- u_N = g_- \text{ en } x = \alpha, \quad B_+ u_N = g_+ \text{ en } x = \beta.$$

## La méthode de collocation

- On choisit  $N + 1$  points sur  $[\alpha, \beta]$  que l'on note  $(x_k)_{k=0, \dots, N}$ .
- On prend  $\psi_k = \delta_{x_k}$  pour  $k \in I_N = \{1, \dots, N - 1\}$ , et  $w_* = 1$ .

On veut donc,

$$(R_N, \psi_i) = (Lu_N - f, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

qui se réécrit  $Lu_N(x_i) = f(x_i)$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$ .

On complète ces  $N - 1$  équations par les conditions de bords en  $x = x_0 = \alpha$  et  $x = x_N = \beta$  :

$$B_- u_N(x_0) = g_-, \quad B_+ u_N(x_N) = g_+.$$

## Remarques sur la méthode de collocation

- Le choix des points  $x_i$  n'est pas arbitraire, on verra plus loin comment les choisir suivant la base  $(\varphi_k)_{k=0,\dots,N}$  choisie.
- La méthode de collocation annule le résidu en tous les points  $x_i$  mais ne dit rien ailleurs.
- On obtient  $N + 1$  équations pour  $N + 1$  inconnues  $\hat{u}_i$ .
- Une formulation équivalente consiste à considérer les valeurs  $u_N(x_i)$  comme les inconnues au lieu des  $\hat{u}_i$ . Il faut alors pouvoir écrire les dérivées de  $u_N$  en les points de collocation  $x_k$  en fonctions de tous les  $u_N(x_i)$ .

## Matrices de différenciations

On considère les  $u_N(x_i)$  comme les inconnues et on veut résoudre le système  $Lu_N(x_i) = f(x_i)$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Il faut écrire les dérivées de  $u_N$  en les points  $x_i$  en fonctions des inconnues (exactement comme en différences finies!) :

$$u_N^{(p)}(x_i) = \sum_{j=0}^N d_{i,j}^{(p)} u_N(x_j)$$

On note  $\mathcal{D} = (d_{i,j})_{i,j=0,\dots,N}$  la matrice de différenciation,  $U$  le vecteur des inconnues, et  $U^{(p)}$  le vecteur de la dérivée p-ième aux points de collocations. On a :

$$U^{(p)} = \mathcal{D}^p U$$



# Sommaire

Généralités sur les méthodes spectrales

Base de Fourier

Les polynomes de Chebyshev

Quelques bibliothèques et logiciels

## Base de Fourier

On suppose que la solution  $u$  est périodique sur  $[0, 2\pi]$ .

- On pose  $\varphi_k(x) = e^{ikx}$  et  $w = 1$ .
- On considère l'approximation

$$u_K(x) = \sum_{k=-K}^{k=K} \hat{u}_k e^{ikx}$$

- Le produit scalaire est :

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} u \bar{v},$$

et on a la relation d'orthogonalité suivante :

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} = 2\pi \delta_{k,l}$$

## Application sur une équation différentielle linéaire

On considère l'équation du second ordre suivante :

$$Lu = -\nu u'' + au' + bu = f,$$

où  $\nu$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes, et  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique. On cherche les solutions  $2\pi$ -périodique.

Les fonctions de bases vérifient la condition de périodicité. On s'intéresse aux méthodes de Galerkin et de collocations.

# Méthode de Galerkin

Le résidu s'écrit :

$$R_K(x) = Lu_K - f = \sum_{k=-K}^{k=K} \hat{u}_k Le^{ikx} - f.$$

On l'annule contre toutes les fonctions tests :

$$(R_K(x), \varphi_l) = \sum_{k=-K}^{k=K} \hat{u}_k (Le^{ikx}, e^{ilx}) - (f, e^{ilx}), \quad l = -K, \dots, K.$$

Or on a :

$$\begin{cases} Lv = -\nu v'' + av' + b, \\ Le^{ikx} = (\nu k^2 + iak + b) e^{ikx}, \\ (f, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ilx} = 2\pi \hat{f}_l. \end{cases}$$

# Méthode de Galerkin

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}(R_K, \varphi_l) &= \sum_{k=-K}^{k=K} \hat{u}_k (\nu k^2 + iak + b) (e^{ikx}, e^{ilx}) - 2\pi \hat{f}_l, \quad l = -K, \dots, K \\ &= 2\pi \hat{u}_l (\nu l^2 + ial + b) - 2\pi \hat{f}_l, \quad l = -K, \dots, K \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc trouvé tous les coefficient  $\hat{u}_k$  :

$$(\nu k^2 + iak + b) \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = -K, \dots, K$$

## Décroissance des coefficients de Fourier

Sur les coefficients de Fourier : Pour une fonction  $u$  dans  $C^{m-1}([0, 2\pi])$ , périodique, dont la dérivée  $m$ -ième est absolument intégrable, on a la décroissance suivante :

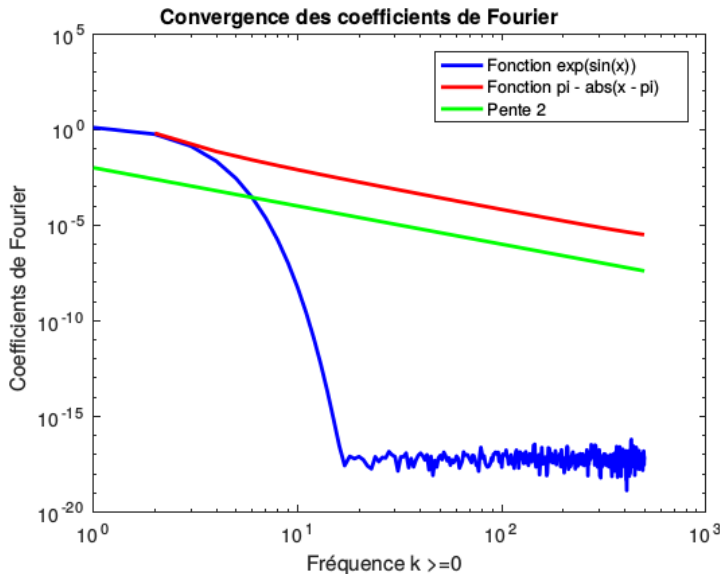
$$|\hat{u}_k| = \mathcal{O}(|k|^{-m}), \quad k \rightarrow \infty$$

Si de plus la dérivée  $m$ -ième est à variation bornée, alors on a un peu mieux :

$$|\hat{u}_k| = \mathcal{O}(|k|^{-m-1}), \quad k \rightarrow \infty$$

En particulier, une fonction  $C^\infty$  a une décroissance exponentielle de ses coefficients de Fourier.

# Exemple de fonctions

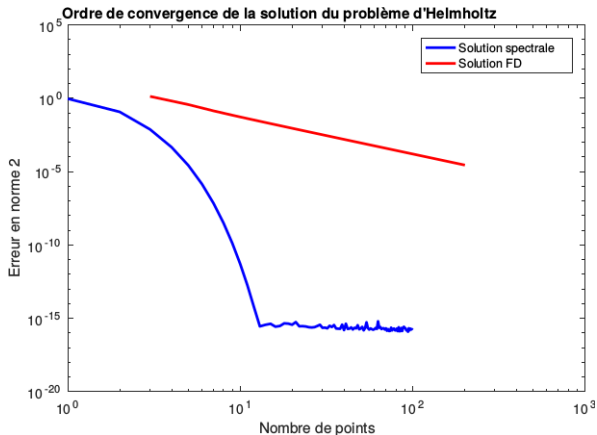


# Erreur Spectrale

On a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u_K\|_{L^2(0,2\pi)} \leq CK^{-m} \|u^{(m)}\|_{L^2(0,2\pi)}$$

Pour une fonction  $C^\infty$ , on a donc une convergence exponentielle (ou *spectrale*).





## Méthodes de collocation

Les points de collocation pour la base de Fourier sont les points équirépartis :

$$x_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0, \dots, N = 2K + 1$$

Il y a deux méthodes de collocation :

1. en prenant comme inconnues les  $\hat{u}_k$ ,
2. ou en restant dans l'espace physique en prenant pour inconnues les  $u_K(x_k)$ .

Dans le deuxième cas, il faut construire les matrices de différenciation.

## Expression des $\hat{u}_k$ en fonction des $u_K(x_j)$

On a :

$$u_K(x_j) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k e^{ikx_j}.$$

En multipliant cette équation par  $e^{-ilx_j}$  et en sommant sur les  $x_j, j = 0, \dots, N-1$ , on obtient :

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_K(x_j) e^{-ilx_j} = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-l)x_j} = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-l)\frac{2j\pi}{N}}.$$

On a de plus la relation d'orthogonalité discrète suivante :

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-l)\frac{2j\pi}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } k-l = mN, m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où

$$\hat{u}_l = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_K(x_j) e^{-ilx_j}$$

## Méthode de collocation avec les inconnues $\hat{u}_k$

On cherche à annuler le résidu en les points de collocations  $x_j$  :

$$-\nu u_K''(x_j) + au_K'(x_j) + bu_K(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, N-1$$

ce qui fait  $N$  équations auxquelles on ajoute la condition de périodicité :

$$u_K(x_N) = u_K(x_0)$$

Le système d'équation s'écrit,

$$\sum_{k=-K}^K (\nu k^2 + aik + b) \hat{u}_k e^{ikx_j} = f(x_j)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité précédente, on obtient :

$$(\nu k^2 + aik + b) \hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ikx_j} = \hat{f}_k$$

## En pratique

L'algorithme est le suivant :

1. On calcul les coefficient  $\hat{f}_k$  de  $f$  avec une FFT.
2. On résout l'équation algébrique obtenue en annulant le résidu.
3. On obtient les  $\hat{u}_k$ , et donc la solution approchée aux points de collocation en effectuant une FFT inverse pour calculer la somme  $\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k e^{ikx_j}$

## Matrices de différenciation

En dérivant l'expression de  $u_K(x)$   $p$  fois, on obtient au point  $x_j$ ,

$$u_K^{(p)}(x_j) = \sum_{k=-K}^K (ik)^p \hat{u}_k e^{ikx_j}.$$

Et en remplaçant les  $\hat{u}_k$ , on a,

$$u_K^{(p)}(x_j) = \sum_{l=0}^{N-1} u_K(x_l) \underbrace{\sum_{k=-K}^K \frac{(ik)^p}{N} e^{ik(x_j - x_l)}}_{d_{l,j}^{(p)}}$$

On remarque, si  $l \neq j$  :

$$d_{l,j}^{(p)} = v_K^{(p)}(x_j - x_l), \quad \hat{v}_k^{(p)} = \frac{(ik)^p}{N}, \quad \hat{v}_k = \frac{1}{N}, \quad v_K(x) = \frac{\sin(Nx/2)}{Nx/2}$$

## Résolution par différenciation

On sait construire la matrice de différenciation  $\mathcal{D} = (d_{l,j})$ . On note  $U$  le vecteur des inconnues  $u_K(x_j)$ .

Pour les méthodes de collocations, on annule le résidu aux points de collocations :

$$Lu_K(x_j) - f(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

On ajoute les conditions de bords périodiques. Ici  $u_K(x_N) = u_K(x_0)$ . En notant  $F$  le vecteur des  $f(x_j)$ , on obtient le système suivant :

$$(-\nu \mathcal{D}^2 + a\mathcal{D} + b\mathcal{I}) U = F$$

Que l'on peut résoudre pour obtenir les  $u_K(x_j)$  directement.

## Relation entre les méthodes de Galerkin et de collocation

On considère la série de Fourier d'une fonction  $f$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k^e e^{ikx}.$$

Comme on l'a vu, les coefficients  $\hat{f}_k^e$  sont exactement ceux de la méthode de Galerkin pour  $-K \leq k \leq K$ .

Les coefficients pour la méthode de collocation sont ceux d'une transformée discrète :

$$\begin{aligned} \hat{f}_k^c &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ikx_j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}_p^e \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{i(p-k)x_j} \right). \end{aligned}$$

Avec les relations d'orthogonalité discrètes, on a donc la relation suivante entre les coefficients :

$$\hat{f}_k^c = \hat{f}_k^e + \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \hat{f}_{k+mN}^e, \quad k = -K, \dots, K$$

# Relation entre les méthodes de Galerkin et de collocation

La solution avec la méthode de collocation s'écrivait :

$$(\nu k^2 + aik + b) \hat{u}_k^c - \hat{f}_k^c = 0$$

Soit encore,

$$(\nu k^2 + aik + b) \hat{u}_k^c - \hat{f}_k^e = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \hat{f}_{k+mN}^e$$

Or, avec la méthode de Galerkin on a la relation,

$$(\nu k^2 + aik + b) \hat{u}_k^g - \hat{f}_k^e = 0$$

La différence entre les deux méthodes vient du phénomène *d'aliasing*. Elle fait intervenir des fréquences en dehors du spectre considéré.

On peut montrer que cette erreur est de l'ordre de l'erreur d'approximation.



## Avec une équation à coefficients non constant

On considère maintenant la même équation différentielle mais où le coefficient  $a$  dépend de l'espace :

$$-\nu u''(x) + a(x)u'(x) + b = f(x), \quad 0 < x < 2\pi$$

avec  $a$   $2\pi$ -périodique.

On adapte les méthodes à cette nouvelle équation.

## Cas de la méthode de Galerkin

On écrit  $u_K(x) = \sum_k \hat{u}_k e^{ikx}$ . On annule le résidu contre toutes les fonctions de bases :

$$(-\nu u_K''(x) + a(x)u_K'(x) + bu_K(x) - f(x), e^{ilx}) = 0, \quad l = -K, \dots, K.$$

En remplaçant  $u_K$  par son expression, tous les termes sont identiques au cas linéaire, sauf pour le terme d'ordre 1 :

$$2\pi(\nu l^2 + b)\hat{u}_l + \sum_{k=-K}^K ik\hat{u}_k (a(x)e^{ikx}, e^{ilx}) = (f(x), e^{ilx}) = 2\pi\hat{f}_l$$

Or on a :

$$(a(x)e^{ikx}, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} a(x)e^{-i(l-k)x} = (a(x), e^{i(l-k)x}) = 2\pi\hat{a}_{l-k}$$

## Cas de la méthode de Galerkin

Le problème à résoudre est donc finalement :

$$(\nu l^2 + b)\hat{u}_l + i \sum_{k=-K}^K k \hat{u}_k \hat{a}_{l-k} = \hat{f}_l$$

- On ne peut plus résoudre ce problème explicitement
- La méthode de Galerkin, dans le cas de coefficient dépendant de l'espace, n'est donc pas bien adaptée.
- Un produit dans l'espace physique correspond à une convolution dans l'espace des fréquences.

## Cas des méthodes de collocation

On commence par la différentiation dans l'espace physique. On rappelle la relation :

$$U^{(p)} = \mathcal{D}^p U$$

On annule le résidu en les points de collocation :

$$-\nu u_K''(x_j) + a(x_j)u_K'(x_j) + bu_K(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, N-1$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$(-\nu \mathcal{D}^2 + \tilde{\mathcal{D}} + bI)U = F,$$

où la matrice  $\tilde{\mathcal{D}}$  est la matrice  $(a(x_i)d_{i,j})_{i,j}$ .

Cette méthode n'est donc pas plus compliquée que dans le cas linéaire !

## Collocation dans l'espace des fréquences

On considère les  $\hat{u}_k$  comme inconnues. En annulant le résidu en les points de collocation on obtient :

$$\sum_{k=-K}^K (\nu k^2 + b) \hat{u}_k e^{ikx_j} + a(x_j) \sum_{k=-K}^K ik \hat{u}_k e^{ikx_j} = f(x_j)$$

On procède comme dans le cas linéaire : on multiplie par  $e^{-ilx_j}$  et on somme sur  $j$ ,

$$N(\nu l^2 + b) \hat{u}_l + \sum_{k=-K}^K ik \hat{u}_k \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} a(x_j) e^{-i(l-k)x_j}}_{\approx N \hat{a}_{l-k}} = N \hat{f}_l, \quad -K \leq l \leq K$$

## Collocation dans l'espace des fréquences

On obtient ici aussi une sorte de convolution (puisqu'on se place dans l'espace des fréquences),

$$(\nu l^2 + b)\hat{u}_l + \sum_{k=-K}^K ik\hat{u}_k\hat{A}_{l-k} = \hat{f}_l, \quad -K \leq l \leq K,$$

où les coefficients  $\hat{A}_{l-k}$  sont définies par :

$$\hat{A}_{l-k} = \begin{cases} \hat{a}_{l-k} & \text{si } -K \leq l-k \leq K, \\ \hat{a}_{l-k+N} & \text{si } -2K \leq l-k < -K, \\ \hat{a}_{l-k-N} & \text{si } K < l-k \leq 2K. \end{cases}$$

## Cas d'une équation non-linéaire

On remplace le terme  $a(x)u'(x)$  par le terme non linéaire  $u(x)u'(x)$ .

- Les méthodes de Galerkin et de collocation amènent dans ce cas à résoudre une équation non linéaire !
- Dans le cas d'un problème non stationnaire (avec une dérivée en temps), il est possible d'explicitier le terme non linéaire.
- Même dans le cas stationnaire, il est possible de passer par un problème non stationnaire afin d'explicitier les termes non linéaire et de récupérer la solution stationnaire, solution du problème de départ.

On considère dans cette partie le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où  $u_0$  est  $2\pi$ -périodique.

## Discrétisation en temps

On approche la solution par

$$u_K(x, t) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k(t) e^{ikx},$$

et on note  $u_K^n$  l'approximation de  $u_K$  au temps  $t_n = n\Delta t$ . Après discrétisation en temps avec un simple schéma d'Euler explicite, le résidu est :

$$R_K = \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} + u_K^n \partial_x u_K^n - \nu \partial_x^2 u_K^{n+1}$$



# Méthode de Galerkin

En appliquant la méthode de Galerkin au résidu, on obtient l'équation suivante :

$$(1 + \Delta t \nu k^2) \hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n - \Delta t \hat{w}_k^n, \quad -K \leq k \leq K,$$

où le terme non linéaire apparaît dans la convolution  $\hat{w}_k^n$  :

$$\hat{w}_k^n = i \sum_{p=-K}^K p \hat{u}_p^n \hat{u}_{k-p}^n$$

Ici, tout est explicite dans la convolution.

## Méthode de collocation

On obtient la même équation que dans le cas Galerkin, mais la convolution peut se calculer simplement,

- Un produit se fait facilement dans l'espace physique.
- Une dérivée se fait facilement dans l'espace des fréquences.
- La FFT permet de passer d'un espace à l'autre.
- On peut combiner les deux pour calculer la convolution.

L'algorithme est le suivant :

1. On calcul  $u_K^n(x_j)$  à partir des  $\hat{u}_k^n$  à l'aide de la FFT.
2. On calcul  $\partial_x u_K^n(x_j)$  à partir des  $ik\hat{u}_k^n$  à l'aide de la FFT.
3. On forme le produit  $w_K^n(x_j) = u_K^n(x_j)\partial_x u_K^n(x_j)$  en tout les points  $x_j$ .
4. On calcul enfin les coefficients de Fourier  $\tilde{w}_k^n$  à l'aide de la FFT.

# Sommaire

Généralités sur les méthodes spectrales

Base de Fourier

Les polynomes de Chebyshev

Quelques bibliothèques et logiciels

## Quelques propriétés des polynômes de Chebyshev

Lorsque l'on a des conditions de Dirichlet aux bords, au lieu de conditions périodique, on utilise d'autres bases.

Les polynômes de Chebyshev sont très utilisés pour cela.

Le  $k$ -ième polynôme de Chebyshev  $T_k$  est un polynôme de degré  $k$  défini sur  $[-1, 1]$  par :

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$$

On posant  $x = \cos(z)$  on a donc :

$$T_k(\cos(z)) = \cos(kz)$$

On peut donc en déduire les premiers polynômes de Chebyshev :

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(\cos(z)) = \cos(z) = x.$$

## Quelques propriétés des polynômes de Chebyshev

On peut montrer une relation de récurrence entre les polynômes de Chebyshev :

$$T_{k+1} - 2xT_k + T_{k-1} = 0, \quad k > 1.$$

Les valeurs aux bords sont  $T_k(1) = 1$  et  $T_k(-1) = (-1)^k$ .

De plus, ces polynômes ont la même parité que leurs degrés :

$$T_k(-x) = (-1)^k T_k(x).$$

Ils s'annulent en les points de Gauss :

$$x_i = \cos \left( \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{k} \right), \quad i = 0, \dots, k,$$

et atteignent leurs maximums en les points de Gauss-Lobatto :

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{k}, \quad i = 0, \dots, k.$$

# Les polynômes de Chebyshev comme fonctions de base

Les polynômes de Chebyshev sont orthogonaux sur  $[-1, 1]$  avec le poids

$$w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a en effet la relation :

$$(T_k, T_l)_w = \int_{-1}^1 T_k(x) T_l(x) w(x) = \frac{\pi}{2} c_k \delta_{k,l}$$

avec :

$$c_k = \begin{cases} 2, & \text{si } k = 0, \\ 1, & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

## Méthode tau sur une équation linéaire

On considère de nouveau l'équation linéaire du second ordre :

$$\begin{cases} -\nu u'' + au' + bu = f, & -1 < x < 1, \\ u(-1) = g_- \\ u(1) = g_+ \end{cases}$$

On approche la solution par la fonction  $u_N(x)$  :

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(x).$$

Remarques :

1. Les fonctions de bases (les polynômes de Chebyshev) ne vérifient pas les conditions de bords homogènes. On utilise donc la méthode tau.
2. Il faut calculer les dérivées des fonctions de bases. Dans le cas de Fourier, c'était très simple. Pour les polynôme de Chebyshev, c'est plus compliqué.

## Dérivées des polynômes de Chebyshev

On peut montrer l'expression suivante sur la dérivée première :

$$T'_k(x) = 2k \sum_{n=0}^{[(k-1)/2]} \frac{1}{c_{k-1-2n}} T_{k-1-2n}(x)$$

On a donc, pour la fonction  $u_N$  :

$$u'_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{(1)} T_k(x),$$

avec :

$$u_k^{(1)} = \frac{2}{c_k} \sum_{p=k+1, (p+k) \text{ impair}}^N \rho \hat{u}_p, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$$u_N^{(1)} = 0.$$

On peut écrire cette relation sous forme matricielle  $\hat{U}^{(1)} = \hat{D}\hat{U}$ .



## Dérivées des polynômes de Chebyshev

Il est possible de continuer pour trouver les dérivées secondes :

$$u_N''(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{(2)} T_k(x),$$

avec :

$$u_k^{(2)} = \frac{1}{c_k} \sum_{p=k+2, (p+k) \text{ pair}}^N p(p^2 - k^2) \hat{u}_p, \quad k = 0, \dots, N-2,$$
$$u_{N-1}^{(2)} = u_N^{(2)} = 0$$

On l'écrit à nouveau sous forme matricielle  $\hat{U}^{(2)} = \hat{D}^2 \hat{U}$ .

## Retour à la méthode tau

Pour la méthode tau, on annule le résidu contre les  $N - 2$  premières fonctions tests, et on ajoute les conditions de bords comme équations. Le résidu est :

$$R_N = -\nu u_N'' + au_N' + bu_N - f,$$

d'où :

$$(R_N, T_i)_w = \sum_{k=1}^N \left( -\nu \hat{u}_k^{(2)} + a \hat{u}_k^{(1)} + b \hat{u}_k \right) (T_k, T_i) = (f, T_i),$$

pour  $i = 0, \dots, N - 2$ . Les relations d'orthogonalités donnent :

$$-\nu \hat{u}_k^{(2)} + a \hat{u}_k^{(1)} + b \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, \dots, N - 2.$$

On ajoute les conditions de bords :

$$u_N(-1) = g_-, \quad \text{s'écrit} \quad \sum_{k=0}^N (-1)^k \hat{u}_k = g_-$$
$$u_N(1) = g_+, \quad \text{s'écrit} \quad \sum_{k=0}^N \hat{u}_k = g_+.$$

## Méthode de collocation

- Pour les méthodes de collocation, on peut utiliser les points de Gauss-Lobatto.
- Tout comme dans le cas de Fourier, il est possible de construire des matrices de différenciation et considérer les valeurs aux points de collocation comme inconnues.
- Pour une fonction  $p(x)$ , une formule d'intégration avec les points de Gauss-Lobatto donne :

$$\int_{-1}^1 p(x)w(x) \approx \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^N \frac{p(x_i)}{\bar{c}_i},$$

avec  $\bar{c}_0 = \bar{c}_N = 0$  et  $\bar{c}_k = 1$  pour  $1 \leq k \leq N - 1$ . On en déduit la relation d'orthogonalité discrète à partir de la relation continue :

$$\sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} T_k(x_i) T_l(x_i) = \frac{\bar{c}_k}{2} N \delta_{k,l}$$

## Méthode de collocation

On se donne  $N + 1$  réels  $u_i$ . On note  $x_i = \cos \frac{\pi i}{N}$  les points de Gauss-Lobatto. La relation  $u_N(x_i) = u_i$  s'écrit sur la base des polynômes de Chebyshev :

$$u_i = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \cos \frac{k\pi i}{N}, \quad (1)$$

que l'on peut calculer à l'aide d'une FFT.

Avec les relations d'orthogonalité discrète, on peut inverser cette relation :

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\bar{c}_k N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} u_i T_k(x_i) = \frac{2}{\bar{c}_k N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} u_i \cos \frac{k\pi i}{N},$$

qui se calcule aussi à l'aide d'une FFT.

# Sommaire

Généralités sur les méthodes spectrales

Base de Fourier

Les polynomes de Chebyshev

Quelques bibliothèques et logiciels

## Librairies et logiciels

- Dedalus : <http://dedalus-project.org/>  
Paquet python qui permet de résoudre des équations assez simplement. Permet de faire du parallèle presque automatiquement.
- Les fichiers matlab du livre *Spectral Methods in Matlab* de Trefethen :  
<http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/spectral.html>.  
Source d'inspiration pour implémenter ensuite ses propres fonctions.
- DMSUITE : <https://fr.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29-dmsuite>  
Suite de fonctions Matlab pour résoudre des équations différentielles avec des méthodes de collocation.

# Librairies et software pour la FFT

- FFTW : <http://fftw.org/>  
Librairie C avec une interface C et Fortran. La librairie de référence pour faire des FFT.  
Leur site web contient une page avec des benchmarks pour comparer énormément de librairie différentes.
- En Python : il y a une FFT dans numpy et scipy. Possibilité d'utiliser pyFFTW, qui est plus rapide.
- En Julia : il y a une FFT de base qui utilise FFTW.
- Matlab, Scilab : oui, il y a des fonctions pour ça.
- sur GPU : cuFFT avec CUDA, clFFT avec OpenCL par exemple.

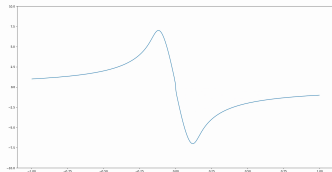
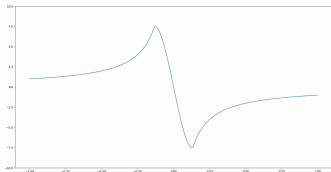
## Exemple lorsque la solution n'est pas régulière

On s'intéresse au problème de transport suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x(-xu) = 0 \quad -1 < x < 1, \\ u(-1, t) = 1, \\ u(1, t) = -1, \\ u(x, 0) = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x. \end{array} \right.$$

La masse de la donnée initiale se concentre en 0.

On résout le problème avec une méthode spectrale à l'aide de Dedalus et avec un schéma upwind volumes finis.





## Exemple avec Dedalus : instabilité de Kelvin-Helmholtz

On s'intéresse au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0, \quad [0, 2] \times [-0.5, 0.5] \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(0, y) = u(2, y) \\ u(x, -0.5) = (0.5, 0) \\ u(x, 0.5) = (-0.5, 0) \\ \partial_t s + (u \cdot \nabla)s - \Delta s = 0, \quad [0, 2] \times [-0.5, 0.5] \\ s(0, y) = s(2, y) \\ s(x, -0.5) = (0, 0) \\ s(x, 0.5) = (1, 0) \end{array} \right.$$

Regarder le code Dedalus permettant de résoudre ce problème !

# Résultat de la simulation

